Лекции по модулярным формам

А.М.Левин

1 Лекция 1: Тригонометрия

1.1 Тригонометрические ряды Эйзенштейна

Объектом нашего изучения будут функции, обладающие свойством периодичности при сдвиге на единицу:

$$f(x+1) = f(x) \tag{1.1}$$

Задача состоит в нахождении всех таких функций. В самом общем виде ответом является ряд, являющийся усреднением некоторой функции $\phi(x)$ по всей решетке:

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \phi(x+\mu) \tag{1.2}$$

Рядами Эйзенштейна называются следующие функции:

$$\varepsilon_k(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+\mu)^k} \tag{1.3}$$

Здесь $k \geq 2$, чтобы обеспечить сходимость. Очевидно, что аналогичный ряд для $k = 1$ является расходящимся. Поэтому для его определения введем суммирование по Эйзенштейну, выделяя его индексом e:

$$\varepsilon_1(x) = \sum\nolimits_e \frac{1}{x+\mu} = \lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} \frac{1}{x+\mu}{}^{*} \tag{1.4}$$

Неприятностью при таком определении могла бы стать потеря периодичности. Однако этого не происходит:

$$\varepsilon_1(x+1) - \varepsilon_1(x) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{x+N+1} - \frac{1}{x-N} \right) = 0$$

Из определений (1.3-1.4) следует очевидное, не считая доказательства почленного дифференцирования, свойство рядов Эйзенштейна:

$$\frac{\partial \varepsilon_k(x)}{\partial x} = -k\varepsilon_{k+1}(x) \tag{1.5}$$

*Как будет видно из дальнейшего: $\varepsilon_1(x) = \pi \cot \pi x$

Выпишем полезное в дальнейшем разложение функции $\varepsilon_1(x)$ в окрестности нуля:

$$\varepsilon_1(x) = \frac{1}{x} - \sum_{k\geq 0} \gamma_{2k} x^{2k-1} \tag{1.6}$$

Нетрудно проверить, что константы определяются формулой:

$$\gamma_{2k} = \sum{}' \frac{1}{\mu^{2k}}, \tag{1.7}$$

где штрих означает отсутствие в сумме члена с $\mu = 0$.

1.2 Формулы сложения

Для произвольных p, q и r таких, что $p+q+r=0$, очевидно выполняется следующее равенство:

$$\frac{1}{pq} + \frac{1}{qr} + \frac{1}{rp} = 0 \tag{1.8}$$

Формулы сложения являются аналогами этой простой формулы, которую можно назвать формулой сложения для рациональных функций.

Положим по определению:

$$P(x,y) = \varepsilon_1(x)\varepsilon_1(y) + \varepsilon_1(y)\varepsilon_1(z) + \varepsilon_1(z)\varepsilon_1(x),\ x+y+z=0 \tag{1.9}$$

Наивным обобщением (1.8) могло бы быть равенство $P(x,y) = 0$. Однако это утверждение неверно. Действительно, положим в (1.8) $p = x+\mu$, $q = y+\nu$, $r = z-\mu-\nu$ и рассмотрим сумму по μ и ν:

$$\sum\nolimits_e \left(\frac{1}{x+\mu}\frac{1}{y+\nu} + \frac{1}{y+\nu}\frac{1}{z-\mu-\nu} + \frac{1}{z-\mu-\nu}\frac{1}{x+\mu}\right) \tag{1.10}$$

Зафиксируем теперь порядок суммирования. Будем, например, суммировать сначала по μ, а затем по ν. Первые два слагаемых действительно совпадают с соответствующими в (1.9), но третье содержит μ в обоих множителях и, поэтому, наивный ответ неочевиден.

Заметим, что из определения (1.9) следует, что функция $P(x,y) = f(x) + g(y)$. Кроме того из симметрии $P(x,y) = P(y,x)$ следует, что $P(x,y) = \frac{1}{2}(f(x)+g(x)) + \frac{1}{2}(f(y)+g(y))$, т.е. $f(x) = g(x)$, тогда $f(-x-y) = f(y) \equiv \mathrm{const}$. Вычислим эту константу. Для этого достаточно подставить в $P(x,y)$ разложение функций $\varepsilon_1(x)$, $\varepsilon_1(y)$ и $\varepsilon_1(z)$ по формуле (1.6), оставляя в ней члены не выше первого порядка малости:

$$P(x,y) \approx \left(\tfrac{1}{x} - x\gamma_2\right)\left(\tfrac{1}{y} - y\gamma_2\right) + \left(\tfrac{1}{y} - y\gamma_2\right)\left(\tfrac{1}{z} - z\gamma_2\right) + \left(\tfrac{1}{z} - z\gamma_2\right)\left(\tfrac{1}{x} - x\gamma_2\right) \approx$$
$$\approx -\gamma_2\left(\tfrac{x}{y} + \tfrac{y}{x} + \tfrac{y}{z} + \tfrac{z}{y} + \tfrac{z}{x} + \tfrac{x}{z}\right) = 3\gamma_2$$

Итак, формула сложения:

$$\varepsilon_1(x)\varepsilon_1(y) + \varepsilon_1(y)\varepsilon_1(z) + \varepsilon_1(z)\varepsilon_1(x) = 3\gamma_2 \tag{1.11}$$

Из формулы (1.11) следуют несколько важных утверждений:

1. Функции $\varepsilon_k(x)$ являются полиномами по $\varepsilon_1(x)$. Для доказательства достаточно выписать формулу сложения при малых y используя разложение (1.6) и рекуррентное соотношение (1.5). Например:

$$\varepsilon_2(x) = -\varepsilon_1'(x) = \varepsilon_1^2(x) + 3\gamma_2 \tag{1.12}$$

2. Константы γ_{2k} являются полиномами по γ_2 с рациональными коэффициентами:

$$\gamma_4 = \frac{1}{5}\gamma_2^2, \quad \gamma_6 = \frac{2}{7}\gamma_2\gamma_4 = \frac{2}{35}\gamma_2^3, \ \ldots \tag{1.13}$$

3. Положим по определению число $\pi = \sqrt{3\gamma_2}$, тогда подстановка вида:

$$\varepsilon_1(x) = i\pi\frac{\mathbf{e}(x)+1}{\mathbf{e}(x)-1} \tag{1.14}$$

переводит формулу сложения (1.11) в функциональное уравнение для экспоненты:

$$\mathbf{e}(x+y) = \mathbf{e}(x)\mathbf{e}(y) \tag{1.15}$$

Отсюда имеем:

$$\mathbf{e}(x) = e^{2\pi i x} \tag{1.16}$$

$$\varepsilon_1(x) = \pi\cot(\pi x) \tag{1.17}$$

Следует заметить, что нам удалось определить экспоненту сразу как заведомо периодическую функцию. Стандартное разложение в ряд получится, если в ее определение: $\mathbf{e}(x) = \frac{\varepsilon_1(x)+\pi i}{\varepsilon_1(x)-\pi i}$ подставить разложение (1.6).

1.3 Квазипериодические функции

Рассмотрим ряд:

$$\phi(x) = x\prod\nolimits_e\left(1+\frac{x}{\mu}\right), \tag{1.18}$$

где произведение по Эйзенштейну определено аналогично суммированию (1.4). Этот ряд является антипериодичным по x. Можно показать, что

$$\phi(x) = \frac{\mathbf{e}(x)-\mathbf{e}(-x)}{2\pi i} = \frac{\sin\pi x}{\pi} \tag{1.19}$$

Кроме того, как нетрудно проверить:

$$\frac{\partial}{\partial x}\log\phi(x) = \varepsilon_1(x) \tag{1.20}$$

Ряд (1.18) понадобится нам в дальнейшем.

В завершение главы, получим аналитический ряд для дробной части. Для этого рассмотрим ряд:

$$g(x,y) = \sum\frac{\mathbf{e}(-\mu y)}{x+\mu}, \quad y \in \mathrm{R} \tag{1.21}$$

Очевидно, что этот ряд зависит только от дробной части y: $[y]$. Пересуммированием можно получить:

$$g(x,y) = \begin{cases} 2\pi i \frac{\mathbf{e}(xy)}{\mathbf{e}(x)-1}, \ 0 < y < 1 \\ \varepsilon_1(x) = \frac{1}{2}(g(x,0) + g(x,1)), \ y = 0 \end{cases} \tag{1.22}$$

Это выражение можно продолжить на всю прямую, определяя его значение в точках разрыва как полусумму.

Используя (1.22) можно выписать аналитический ряд для дробной части:

$$\sum{}' \frac{\mathbf{e}(-\mu y)}{\mu} = 2\pi i \left([y] - \frac{1}{2}\right) \tag{1.23}$$

$$\sum{}' \frac{\mathbf{e}(-\mu y)}{\mu^2} = (2\pi i)^2 \left(\frac{[y]^2}{2} - \frac{[y^2]}{2} + \frac{1}{12}\right) \tag{1.24}$$

Обобщением (1.18) является:

$$\phi(x,t) = \prod\nolimits_e \left(1 + \frac{x}{t+\mu}\right) = \frac{\phi(x,t)}{\phi(t)}, \tag{1.25}$$

1.4 Двоякопериодические функции

Пусть дана решетка Γ с образующими u и v, причем вектор v на комплексной плоскости получается из u поворотом на угол, меньший π против часовой стрелки. Введем обозначения:

$$\xi = \frac{x}{u}, \quad \tau = \frac{v}{u}, \quad Im\tau > 0 \tag{1.26}$$

$$E_k(x,u,v) = \sum_{m,n}^{e} \frac{1}{x + mu + nv} \tag{1.27}$$

При $k \geq 3$ ряд сходится абсолютно и не зависит от выбора образующих:

$$E_k(x,u,v) = E_k(x,\Gamma), \ \ k > 3. \tag{1.28}$$

При $k = 1, 2$ применяется суммирование по Эйзенштейну, причем:

$$\sum_{m,n}^{e} = \sum_{n}^{e} \sum_{m}^{e} \tag{1.29}$$

E_k являются однородными функциями степени k:

$$E_k(\lambda x, \lambda u, \lambda v) = \lambda^{-k} E_k(x,u,v) \tag{1.30}$$

Пусть $u = 1$. Используя прескрипцию (1.29), получаем:

$$E_1(\xi,\tau) = \sum_{n}^{e} \sum_{m}^{e} \frac{1}{\xi + m + n\tau} = \sum_{n}^{e} \pi i \frac{e(\xi + n\tau) + 1}{e(\xi + n\tau) - 1} \tag{1.31}$$

Видно, что без суммирования по Эйзенштейну ряд не сходится, т. к. общий член стремится к -1 при $n \to \infty$ и к 1 при $n \to -\infty$. Пересуммированием получаем:

$$E_1(x) = \frac{1}{x} - \sum_1^\infty e_{2k}(u,v)x^{2k-1}, \tag{1.32}$$

где:

$$e_{2k}(u,v) = \sum_{m,n}^{e'} \frac{1}{(mu+nv)^{2k}} \tag{1.33}$$

В отличии от тригонометрического случая при таком способе суммирования теряется периодичность по v:

$$E_1(x+u,u,v) = E_1(x,u,v), E_1(x+v,u,v) = E_1(x,u,v) - \frac{2\pi i}{u}, \tag{1.34}$$

действительно:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} \varepsilon_1(\xi+n\tau+\tau) - \varepsilon_1(\xi+n\tau) = \lim_{N\to\infty} (\varepsilon_1(\xi+(N+1)\tau) - \varepsilon_1(\xi - N\tau)) = -2\pi i \tag{1.35}$$

Переход к другому базису осуществляется преобразованием:

$$\tilde{v} = av + bu\tilde{u} = cv + du, \quad ad - bc = 1, \tag{1.36}$$

где a, b, c, d- вещественные числа. Такое преобразование сохраняет ориентацию базиса.

Утверждение 1:

1. $E_1(x,\tilde{u},\tilde{v}) - E_1(x,\tilde{u},\tilde{v}) = c_1 + c_2 x$. Проверяется двойным дифференцированием по x (E_3 сходится абсолютно).

2. $c_1 = 0$, т. к. E_1- нечетна по x.

3. $c_2 = 2\pi i \frac{c}{u\tilde{u}}$.

$$E_1(x+\tilde{u},\tilde{u},\tilde{v}) - E_1(x+cv+du,u,v) = E_1(x,\tilde{u},\tilde{v}) - (E_1(x,u,v) - \frac{2\pi i}{u}) \tag{1.37}$$

Как следствие, получаем соотношения:

$$\begin{array}{c} E_1(x,\tilde{u},\tilde{v}) = E_1(x,u,v) + 2\pi i \frac{c}{u\tilde{u}} x, \\ E_2(x,\tilde{u},\tilde{v}) = E_2(x,u,v) - 2\pi i \frac{c}{u\tilde{u}}, \\ e_2(\tilde{u},\tilde{v}) = e_2(u,v) - 2\pi i \frac{c}{u\tilde{u}}. \end{array} \tag{1.38}$$

Используя (1.28,1.30,1.38), получаем трансформационные свойства E_k при преобразованиях базиса (1.36), дополненных растяжением аргумента x:

$$E_k(\frac{\xi}{c\tau+d}, \frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = (c\tau+d)^k E_k(\xi,\tau) + \left\{ \begin{array}{l} 2\pi c\xi, \ k=1 \\ -2\pi c(c\tau+d), \ k=2 \end{array} \right. \tag{1.39}$$

Функция $\wp(x) = E_2(x) - e_2$ не зависит от порядка суммирования и называется $\wp$-функцией Вейерштрасса.

Теорема (Лиувилль):

Эллиптическая функция, не имеющая особенностей, является постоянной.

Из соотношений:

$$E_3^2 = (E_2 - e_2)^3 - 15E_4(E_2 - e_2) - 35e_6, E_4 = (E_2 - e_2)^2 - 5e_4, \tag{1.40}$$

следует, что $e_8, e_{10}, ...$ являются полиномами от e_4, e_6 (аналог утв. (1.13)).

$$2\pi i \frac{\partial}{\partial \tau} E_1(\xi, \tau) = E_3(\xi, \tau) - E_1(\xi, \tau) E_2(\xi, \tau) \tag{1.41}$$

Исследуем свойства функции:

$$\Phi(\xi, \tau) = \xi \prod_e{}' \left(1 + \frac{\xi}{m + n\tau}\right), \tag{1.42}$$

которая является обобщением (1.18). Также как и в эллиптическом случае (1.20) выполняется соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \log \Phi(\xi, \tau) = E_1(\xi, \tau). \tag{1.43}$$

Используя (1.25), получаем:

$$\Phi(\xi, \tau) = \phi(\xi) \prod_e{}' \phi(\xi, n\tau) = \frac{1}{2\pi i}(z^{1/2} - z^{-1/2}) \prod_1^\infty \frac{(1 - zq^j)(1 - z^{-1}q^j)}{(1 - q^j)^2}, \tag{1.44}$$

где использованы обозначения: $z = e(\xi)$, $q = e(\tau)$. Отсюда следуют свойства функции $\Phi(\xi, \tau)$ при модулярных преобразованиях:

$$\Phi(\xi + 1, \tau) = -\Phi(\xi, \tau) \tag{1.45}$$

$$\Phi(\xi + \tau, \tau) = -z^{-1} q^{-1/2} \Phi(\xi, \tau) \tag{1.46}$$

Зная закон преобразования E_1 (1.39) и связь между E_1 и $\Phi(\xi, \tau)$, можно получить:

$$\Phi(\frac{\xi}{c\tau + d}, \frac{a\tau + b}{c\tau + d}) = \frac{1}{c\tau + d} e(\frac{1}{2} \frac{c\xi^2}{c\tau + d}) \Phi(\xi, \tau), \tag{1.47}$$

Нормировочная константа определяется из сравнения левой и правой частей при $\xi = 0$. Ряд Фурье по ξ для $\Phi(\xi, \tau)$ содержит полуцелые степени z (из-за свойства антипериодичности (1.45)) и может быть записан в виде:

$$\Phi(\xi, \tau) = F(q) \sum a_j(q) q^{\frac{1}{2}(j + \frac{1}{2})^2} (-z)^{j + \frac{1}{2}}. \tag{1.48}$$

Упражнение 1. Доказать формулу (1.46).

Упражнение 2. Найти рекуррентную формулу на коэффициенты $a_j(q)$. (Ответ: $a_j(q) = a_{j+1}(q)$)

Ряд:

$$\Theta(\xi, \tau) = \sum q^{\frac{1}{2}(j + \frac{1}{2})^2} (-z)^{j + \frac{1}{2}} \tag{1.49}$$

называется Θ- рядом Якоби. Он удовлетворяет уравнению теплопроводности:

$$2\pi i\frac{\partial}{\partial\tau}\Theta(\xi,\tau)=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial\xi})^2\Theta(\xi,\tau) \tag{1.50}$$

На $\Phi(\xi,\tau)$ также можно записать дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial}{\partial\xi}\log\Phi(\xi,\tau)=\frac{\partial}{\partial\tau}E_1(\xi,\tau)=\frac{1}{2\pi i}(E_3-E_1E_2)=\frac{1}{4\pi i}\frac{\partial}{\partial\xi}(E_1^2-E_2), \tag{1.51}$$

где использовано, что:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}E_k=-kE_{k+1}. \tag{1.52}$$

Таким образом:

$$2\pi i\frac{\partial}{\partial\tau}\log\Phi(\xi,\tau)=\frac{1}{2}(E_1^2-E_2)+f(\tau)=\frac{1}{2}(E_1^2-E_2+3e_2), \tag{1.53}$$

где $f(\tau)$ найдена из асимптотики $\xi\to 0$:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\log\Phi(\xi,\tau)\to 0,\;\; \xi\to 0,\;\; E_1\sim\frac{1}{\xi}-e_2\xi,\;\; E_2\sim\frac{1}{\xi^2}+e_2. \tag{1.54}$$

Если найти функцию $\eta(\tau)$, такую что:

$$e_2(\tau)=-4\pi i\frac{\partial}{\partial\tau}\log\eta(\tau), \tag{1.55}$$

то $\tilde{\Phi}(\xi,\tau)=\Phi(\xi,\tau)\eta^3(\tau)$ будет удовлетворять уравнению теплопроводности:

$$\begin{gathered}2\pi i\tfrac{\partial}{\partial\tau}\log\tilde{\Phi}(\xi,\tau)=\tfrac{1}{2}(E_1^2-E_2)=\\ =\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}\log\tilde{\Phi}(\xi,\tau)+\left(\tfrac{\partial}{\partial\xi}\log\tilde{\Phi}(\xi,\tau)\right)^2\right)=\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}\tilde{\Phi}(\xi,\tau).\end{gathered} \tag{1.56}$$

Следовательно $\tilde{\Phi}(\xi,\tau)=\Theta(\xi,\tau)=\Phi(\xi,\tau)\eta^3(\tau)$. Перепишем $e_2(\tau)$ следующим образом:

$$\begin{gathered}e_2(\tau)=\sum^e\tfrac{1}{(m+n\tau)^2}=\gamma_2+\sum_n{}'\varepsilon_2(n\tau)=\tfrac{\pi^2}{3}-4\pi^2\sum{}'\tfrac{q^n}{(1-q^n)^2}\\ =-4\pi^2\left(-\tfrac{1}{12}+2\sum_{n>0}\sum_{j>0}jq^{nj}\right)=-4\pi^2\left(-\tfrac{1}{12}+2\sum_j j\tfrac{q^j}{1-q^j}\right)\\ =-4\pi i\tfrac{\partial}{\partial\tau}\log(q^{1/24}\prod_{j=1}^\infty(1-q^j)).\end{gathered} \tag{1.57}$$

Отсюда:

$$\eta(\tau)=q^{1/24}\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j), \tag{1.58}$$

с точностью до нормировочного множителя, который определяется из этого выражения при $q\to 0$ и равен 1.

Упражнение 3. Используя свойства $e_2(\tau)$, покажите, что:

$$\eta(\frac{a\tau+b}{c\tau+d})=\varepsilon\sqrt{c\tau+d}\,\eta(\tau)\quad(\varepsilon=\text{const}).$$

2 Лекция 2: Тэта-функции и тождество Якоби

2.1 Двоякопериодические мероморфные функции

Рассмотрим конечную сумму на эллиптической кривой Σ:

$$\sum_n a_{n,k} E_k(\xi - \alpha_n), \quad \xi \in \Sigma, \quad a_{n,k} \in \mathbf{C} \tag{2.59}$$

Поскольку функции $E_k(\xi)$ - эллиптические при $k \geq 2$, а функция $E_1(\xi)$ сдвигается на константу при сдвиге $\xi \to \xi + 1$, то для эллиптичности суммы (2.59) необходимо и достаточно выполнения следующего условия:

$$\sum_n a_{n,1} = 0 \tag{2.60}$$

В этом условии легко узнать очевидное требование на двоякопериодичекую функцию на эллиптической кривой. А именно, сумма вычетов этой функции должна равняться нулю.

Известно, что любая мероморфная функция на рациональной кривой может быть представлена виде произведения:

$$\prod_i (x - \alpha_i)^{n_i} \prod_j (x - \beta_i)^{-m_j}, \quad x \in \mathbf{C}\mathrm{P}^1, \quad n_i, m_j \in \mathbf{N} \tag{2.61}$$

Попробуем аналогичным образом построить двоякопериодическую функцию на эллиптической кривой. В качестве основного объекта выберем тэта-функцию Якоби, рассмотренную в предыдущем параграфе, так как она имеет ноль первого порядка в точке $\xi = 0$. Напомним ее определение:

$$\begin{gathered}\Theta(\xi, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-z)^{j+\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}\left(j+\frac{1}{2}\right)^2} = \\ = i q^{\frac{1}{8}} \left(z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - z q^n\right)\left(1 - z^{-1} q^n\right)\left(1 - q^n\right), \\ z = \mathbf{e}(\xi), \quad q = \mathbf{e}(\tau)\end{gathered} \tag{2.62}$$

Квазипериодические свойства:

$$\left\{\begin{array}{l} \Theta(\xi + 1) = -\Theta(\xi) \\ \Theta(\xi + \tau) = z^{-1} q^{-\frac{1}{2}} \Theta(\xi) \end{array}\right. \tag{2.63}$$

По аналогии с (2.61) рассмотрим произведение:

$$\prod_i \Theta(\xi - \alpha_i)^{n_i}, \quad n_i \in \mathbf{Z} \tag{2.64}$$

С помощью (2.63) изучим квазипериодические свойства этого произведения:

$$\left\{\begin{array}{l} \prod_i \Theta(\xi + 1 - \alpha_i)^{n_i} = (-1)^{\sum n_i} \prod_i \Theta(\xi - \alpha_i)^{n_i} \\ \prod_i \Theta(\xi + \tau - \alpha_i)^{n_i} = (-1)^{\sum n_i} z^{-\sum n_i} q^{-\frac{1}{2}\sum n_i} \prod_i a_i^{n_i}, \quad a_i = \mathbf{e}(\alpha_i) \end{array}\right. \tag{2.65}$$

Ясно, что для двоякопериодичности произведения (2.64) необходимо потребовать $\sum n_i = 0$. Далее положим $\prod a_i = q^N$, $N \in \mathbf{N}$. Тогда функция $z^{-N} \prod\limits_i \Theta(\xi - \alpha_i)^{n_i}$ будет очевидно эллиптической.

Итак, функция $z^{-N} \prod\limits_i \Theta(\xi - \alpha_i)^{n_i}$ двоякопериодична тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

$$\begin{cases} \sum\limits_i n_i = 0 \\ \sum\limits_i \alpha_i n_i \in \langle \tau, 1 \rangle \end{cases} \tag{2.66}$$

Заметим, что в случае мероморфной функции на рациональной кривой второе условие отсутствовало, то есть нули и полюса могли находится в произвольных местах. В этом заключается основная специфика мероморфных двоякопериодических функций на эллиптической кривой.

2.2 Тождество Вейерштрасса и Якоби

Начнем этот параграф с простого замечания: $E_3(T) = 0$, где T - полупериод, то есть $T \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{\tau+1}{2}\right\}$. Это следует из нечетности $E_3(\xi)$. Учитывая также, что $E_3(\xi) = -2E_2'(\xi)$, заключаем, что у функции $E_2(\xi) - E_2(T)$ есть ноль второго порядка в точке $\xi = T$. Отсюда и из структуры полюсов следует знаменитое тождество Вейерштрасса:

$$E_2(\xi) - E_2(T) = \frac{(\Theta'(0))^2 \Theta(\xi - T)\Theta(\xi + T)}{\Theta^2(\xi)\Theta^2(T)} \tag{2.67}$$

Выпишем теперь значения тэта-функции в полупериодах:

$$\begin{array}{l} \Theta'(0) = -2\pi q^{\frac{1}{8}} \prod(1 - q^j)^3 = 2\pi\eta^3 \\ \Theta(\frac{1}{2}) = -2q^{\frac{1}{8}} \prod(1 + q^j)^2(1 - q^j) \\ \Theta(\frac{\tau}{2}) = -iq^{-\frac{1}{8}} \prod(1 - q^{j-\frac{1}{2}})^2(1 - q^j) \\ \Theta(\frac{1+\tau}{2}) = q^{-\frac{1}{8}} \prod(1 + q^{j-\frac{1}{2}})^2(1 - q^j) \end{array} \tag{2.68}$$

Отсюда получаем тождество Якоби:

$$\Theta'(0) = \pi\Theta(\frac{1}{2})\Theta(\frac{\tau}{2})\Theta(\frac{1+\tau}{2}) \tag{2.69}$$

3 Лекция 3: Формула суммирования Пуассона

Рассмотрим еще один способ построения модулярных форм, основанный на использовании формулы суммирования Пуассона (ФСП). Напомним, что эта формула связывает сумму значений функции в узлах решетки с суммой значений Фурье образа этой функции в узлах дуальной решетки. Простейший вариант такой связи заключается в следующем. Рассмотрим вещественнозначную функцию $f(x)$ и ее преобразование Фурье:

$$\hat{f}(p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathbf{e}(-xp)dx \tag{3.70}$$

Тогда ФСП утверждает:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m) \tag{3.71}$$

Для доказательства построим по функции $f(x)$ периодическую с единичным периодом функцию $F(x)$:

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) \tag{3.72}$$

Для периодической функции существует ряд Фурье (должная сходимость интегралов и рядов везде предполагается):

$$F(x) = \sum_{m} a_m \mathbf{e}(mx), \tag{3.73}$$

$$\begin{gathered} a_m = \int\limits_0^1 F(x)\mathbf{e}(-mx)dx = \int\limits_0^1 \sum_n f(x+n)\mathbf{e}(-mx)dx = \\ = \sum_n \int\limits_0^1 f(x+n)\mathbf{e}(-m(x+n))dx = \sum_n \int\limits_n^{n+1} f(x)\mathbf{e}(-mx) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathbf{e}(-mx) \end{gathered} \tag{3.74}$$

Таким образом, мы получили, что значение Фурье образов функции, взятых в целых точках, являются коэффициентами Фурье для усреднения этой функции:

$$\hat{f}(m) = a_m \tag{3.75}$$

ФСП тривиально обобщается на многомерный случай. Достаточно в формуле (3.71) заменить $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{Z}^r$, где r - размерность пространства $\mathbb{R}^r$, в которое вложена решетка. При этом преобразование Фурье дается формулой:

$$\hat{f}(p) = \int f(x)\mathbf{e}(-(p,x))\mathrm{vol}, \tag{3.76}$$

где vol - форма объема. Она выбирается таким образом, чтобы объем фундаментального параллелепипеда был равен единице.

Рассмотрим теперь невырожденную положительноопределенную унимодулярную билинейную форму:

$$B:\ \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\quad \det B = 1 \tag{3.77}$$

и сопоставим ей следующую функцию:

$$\Theta_B(\tau) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^r} q^{\frac{1}{2}B(\gamma,\gamma)} = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^r} f(\gamma), \quad f(\gamma) = \exp\{i\pi\tau B(\gamma,\gamma)\} \tag{3.78}$$

Применим ФСП:

$$\Theta_B(\tau) = \sum_{\hat{\gamma}\in\mathbb{Z}^r} \hat{f}(\hat{\gamma}),$$

где

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{(-i\tau)^{\frac{r}{2}}} e^{\frac{\pi}{i\tau}B(p)} \tag{3.79}$$

При этом предполагается, что поднятие и опускание индексов осуществляется с помощью самой матрицы B. Далее имеем:

$$\Theta_B(\tau) = \frac{1}{(-i\tau)^{\frac{r}{2}}}\Theta_B(-\frac{1}{\tau})$$

Итак

$$\Theta_B(-\frac{1}{\tau}) = (-i\tau)^{\frac{r}{2}}\Theta_B(\tau) \tag{3.80}$$

Значит, если r делится на 8, то $\Theta_B(\tau)$ может являться модулярной формой веса $\frac{r}{2}$. Для этого необходима инвариантность $\Theta_B(\tau)$ относительно сдвигов $\tau \to \tau + 1$, что четности формы B. Известно, что четная и унимодулярная решетка существует в пространстве размерности, кратной 8. В размерности 8 существует только решетка E_8, в 16 - $E_8 \otimes E_8$, в 24 - $E_8 \otimes E_8 \otimes E_8$ и L. Заметим также, что в размерности 8 существует только одна модулярная форма веса 4 - e_4, т.е $\Theta_{E_8} \sim e_4$. Коэффициент пропорциональности восстанавливается по первым членам:

$$\Theta_{E_8} = \gamma_4 e_4. \tag{3.81}$$

Гамма-функция Эйлера задается интегралом:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty y^{s-1}e^{-y}dy, \quad Res > 0. \tag{3.82}$$

Интегрируя по частям, можно получить:

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \tag{3.83}$$

При целых отрицательных s имеет полюс первого порядка:

$$\Gamma(s-n) \sim \frac{(-1)^n}{n!(s-n)} \tag{3.84}$$

Введем обозначения для точек на решетке и в C^2:

$$w = m + n\tau, \quad (m,n) \in \mathbb{Z}^2, \eta = r + s\tau, \quad (r,s) \in \mathbb{R}^2. \tag{3.85}$$

Исследуем свойства функции:

$$K_0(\xi,\eta,s) = \sum_w \frac{\chi_\eta(w)}{|\xi + w|^{2s}}, \tag{3.86}$$

где:

$$\chi_\eta(w) = \exp\left(\frac{2\pi i}{\tau - \overline{\tau}}(\overline{\eta}w - \eta\overline{w})\right). \tag{3.87}$$

Ряд (3.86) сходится при $Res > 1$. Физически интересен случай $s = 1$, когда он является функцией Грина оператора ??? на торе. Можно показать, что функция:

$$\widetilde{K}_0(\xi,\eta,s) = \left(\frac{\tau - \overline{\tau}}{2\pi i}\right)^s \Gamma(s)K_0(\xi,\eta,s), \tag{3.88}$$

аналитически продолжается на все значения s.

Докажем формулу Римана:

$$\widetilde{K}_0(\xi,\eta,s)=\chi_\eta(-\xi)\widetilde{K}_0(\eta,\xi,1-s) \tag{3.89}$$

Для этого преобразуем (3.88):

$$\begin{gathered}\left(\tfrac{\tau-\overline{\tau}}{2\pi i}\right)^s\Gamma(s)\sum_w \tfrac{\chi_\eta(w)}{|\xi+w|^{2s}}=\sum_w\left(\tfrac{\tau-\overline{\tau}}{2\pi i}\right)^s\tfrac{\chi_\eta(w)}{|\xi+w|^{2s}}\int_0^\infty y^{s-1}e^{-y}dy=\\ =\sum_w\chi_\eta(w)\int_0^\infty y^{s-1}e^{-\frac{2\pi iy}{\tau-\overline{\tau}}|\xi+w|^2}dy=\int_0^1 y^{s-1}\left(\sum_w\chi_\eta(w)e^{-\frac{2\pi iy}{\tau-\overline{\tau}}|\xi+w|^2}\right)dy\\ +\int_1^\infty y^{s-1}\left(\sum_w\chi_\eta(w)e^{-\frac{2\pi iy}{\tau-\overline{\tau}}|\xi+w|^2}\right)dy.\end{gathered} \tag{3.90}$$

(по модулю обоснования перемены порядка интегрирования и суммирования). Воспользуемся формулой Пуассона(), чтобы переписать первое слагаемое:

$$\begin{gathered}\int_0^1 y^{s-1}\left(\sum_w\chi_\eta(w)e^{-\frac{2\pi iy}{\tau-\overline{\tau}}|\xi+w|^2}\right)dy=\\ =\chi_\eta(-\xi)\int_0^1 y^{s-1}\left(\sum_{p\in\Gamma}\chi_\xi(p)e^{-\frac{2\pi i}{y(\tau-\overline{\tau})}|p+\eta|^2}\right)dy=\\ =\chi_\eta(-\xi)\int_1^\infty u^{-s}\left(\sum_{p\in\Gamma}\chi_\xi(p)e^{-\frac{2\pi iu}{(\tau-\overline{\tau})}|p+\eta|^2}\right)du\end{gathered} \tag{3.91}$$

Мы получили для $\widetilde{K}_0$ следующее выражение:

$$\begin{gathered}\widetilde{K}_0(\xi,\eta,s)=\chi_\eta(-\xi)\int_1^\infty y^{-s}\left(\sum_w\chi_\xi(w)e^{-\frac{2\pi iy}{(\tau-\overline{\tau})}|w+\eta|^2}\right)dy\\ +\int_1^\infty y^{s-1}\left(\sum_w\chi_\eta(w)e^{-\frac{2\pi iy}{\tau-\overline{\tau}}|\xi+w|^2}\right)dy.\end{gathered} \tag{3.92}$$

Отсюда и из свойства:

$$\chi_\eta(-\xi)\chi_\xi(-\eta)=1 \tag{3.93}$$

следует формула Римана. Обобщением (3.86)является функция:

$$K_a(\xi,\eta,s)=\sum_w\frac{\chi_\eta(w)(\xi+\eta)^a}{|\xi+w|^{2s}}, \tag{3.94}$$

где a-натуральное ???. Аналогично (3.88) определяется аналитическое по s выражение:

$$\widetilde{K}_a(\xi,\eta,s)=\left(\frac{\tau-\overline{\tau}}{2\pi i}\right)^{s-a}\Gamma(s-a)\widetilde{K}_0(\xi,\eta,s) \tag{3.95}$$

При $a>0$ имеется простая связь между $\widetilde{K}_{-a}$ и $\widetilde{K}_0$:

$$\widetilde{K}_{-a}(\xi,\eta,s)=(-1)^a\left(\frac{2\pi i}{\tau-\overline{\tau}}\right)^a\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+a)}\frac{\partial^a}{\partial\xi^a}\widetilde{K}_0(\xi,\eta,s). \tag{3.96}$$

Отсюда восстанавливаются свойства $\widetilde{K}_a$.

Упражнение 3. Покажите, что:

$$\widetilde{K}_a(\xi,\eta,s)=\chi_\eta(-\xi)\widetilde{K}_a(\eta,\xi,a+1-s) \tag{3.97}$$

4 Лекция 4: Детерминант оператора Лапласа

Формула Кронекера:

$$\frac{\tau-\overline{\tau}}{2\pi i}\sum{}' \frac{\chi_\xi(w)}{|w|^2} = -\log\left|\frac{\Theta(\xi,\tau)}{\eta(\tau)}\right|^2 - 2\pi i\frac{(\xi-\overline{\xi})}{\tau-\overline{\tau}} \tag{4.98}$$

Левая и правая части равенства инвариантны относительно модулярных преобразований $\xi\to\xi+1, \xi\to\xi+\tau$. Левую часть можно интерпретировать, как ряд Фурье для функции в правой части.

Функция Θ задает расслоение над тором.

На расслоении есть эрмитова структура.

$$\begin{gathered}\log\left\|\frac{\Theta(\xi,\tau)}{\eta(\tau)}\right\|^2 = \log\left|\frac{\Theta(\xi,\tau)}{\eta(\tau)}\right|^2 + 2\pi i\frac{(\xi-\overline{\xi})^2}{\tau-\overline{\tau}},\\ \left\|\frac{\Theta(\xi,\tau)}{\eta(\tau)}\right\|^2 = \left|\frac{\Theta(\xi,\tau)}{\eta(\tau)}\right|^2\exp\left(\frac{2\pi i(\xi-\overline{\xi})^2}{(\tau-\overline{\tau})}\right)\end{gathered} \tag{4.99}$$

Формулы Кронекера и Римана полезны при вычислении детерминанта оператора Лапласа на торе:

$$\Delta_\xi = \left(\frac{\tau-\overline{\tau}}{2\pi i}\right)\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\overline{\eta}}, \tag{4.100}$$

При $s=1, \eta=0$ формула Римана (3.89) запишется следующим образом:

$$\begin{gathered}\left(\frac{\tau-\overline{\tau}}{2\pi i}\right)^{1-s}\Gamma(1-s)\sum_w\frac{1}{|\xi+w|^{2(1-s)}}|_{s=1}\\ = \frac{1}{1-s}\left(\sum 1 + (1-s)\sum\frac{\log|w+\xi|^2}{|w+\xi|^{2(1-s)}} + o(1-s)\right)|_{s=1} =\\ = \sum\log|w+\xi|^2 = \frac{\tau-\overline{\tau}}{2\pi i}\sum{}'\frac{\chi_\xi(w)}{|w|^2}(\text{почемуштрих?})\end{gathered} \tag{4.101}$$

Заметим, что собственными функциями оператора Лапласа на торе являются $\chi_{w+\xi}$:

$$\Delta_\xi = \chi_{w+\xi}(\eta) = |w+\xi|^2\chi_{w+\xi}. \tag{4.102}$$

Поэтому детерминант выражается через сумму логарифмов, фигурирующую в (4.101):

$$\sum\log|w+\xi|^2 = \log\det\Delta_\xi \tag{4.103}$$

Отсюда и из формул (4.98,4.101) получаем, что:

$$\det\Delta_\xi = \left\|\frac{\Theta(\xi,\tau)}{\eta(\tau)}\right\|^2 \tag{4.104}$$

Что-то здесь называется Квилленовской аномалией.

4.1 Структуры на пространстве модулярных форм

Пространство $\mathcal{M}^k$ модулярных форм веса k состоит из функций на модулярной фигуре, преобразующихся по закону (???) и разлагающихся по положительным степеням q:

$$f(\tau) = \sum_{n\geq 0} a_n q^n. \tag{4.105}$$

Оно содержит в качестве идеала пространство параболических форм $\mathcal{S}^k$ (т.е. тех форм, у которых $a_0 = 0$). Очевидно, что при умножении модулярных форм веса k и l получается форма веса $k+l$:

$$\mathcal{M}^k \otimes \mathcal{M}^l \to \mathcal{M}^{k+l}. \tag{4.106}$$

Производная от модулярной формы плохо преобразуется при модулярных преобразованиях:

$$\dot{f}(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = (c\tau+d)^{k+2}\dot{f}(\tau) + ck(c\tau+d)^{k+1}f(\tau). \tag{4.107}$$

Лишь при $k=0$ $\dot{f}$ является модулярной формой (веса 2). Оказывается, что можно определить "правильную" операцию дифференцирования модулярных форм. Закон преобразования ряда Эйзенштейна e_2:

$$e_2(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = (c\tau+d)^2 e_2(\tau) - 2\pi i c(c\tau+d) \tag{4.108}$$

наталкивает на мысль определить "длинную производную":

$$D_k f = \dot{f} + \frac{k}{2\pi i} e_2 f. \tag{4.109}$$

Нетрудно проверить, что:

$$\begin{gathered} D_k : \quad \mathcal{M}^k \to \mathcal{M}^{k+2}, \\ D_k : \quad \mathcal{S}^k \to \mathcal{S}^{k+2}, \\ D_k(fg) = D_k(f)g + fD_k(g). \end{gathered} \tag{4.110}$$

Таким образом e_2 это связность в расслоении над модулярной фигурой.

Известно, что не существует параболических форм веса 14 (см. лекцию 2). Используя этот факт и (4.110), получаем полезное следствие:

$$D_{12}\Delta = \frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{12}{2\pi i} e_2 \Delta = 0, \tag{4.111}$$

где Δ-параболическая форма веса 12. Отсюда:

$$\Delta \sim \eta^{24} \tag{4.112}$$

На модулярных (параболических???) формах есть бесконечный набор скобок Коэна. Если f и g- параболические формы веса k и l соответственно, то:

$$\begin{gathered} \{f,g\}_0 = fg \quad - \text{параболическая веса } k+l, \\ \{f,g\}_1 = l\dot{f}g - kf\dot{g} \quad - \text{параболическая веса } k+l+2, \\ \{f,g\}_2 = l(l+1)\ddot{f}g - 2(k+1)(l+1)\dot{f}\dot{g} + k(k+1)f\ddot{g} \ - \sim \text{веса } k+l+4 \\ \vdots \end{gathered} \tag{4.113}$$

На параболических формах одинакового веса есть эрмитово скалярное произведение Петерсона. Во-первых можно определить локальную $SL(2,\mathbb{Z})$- инвариантную форму:

$$(f,g)|_\tau = f(\tau)\overline{g(\tau)}y^k, y = \mathrm{Im}\tau = \frac{\tau - \overline{\tau}}{2i}. \tag{4.114}$$

Модулярную инвариантность легко проверить:

$$f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)\overline{g\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)} = |c\tau+d|^{2k}f(\tau)\overline{g(\tau)}, y^k\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = |c\tau+d|^{-2k}y^k(\tau). \quad (4.115)$$

Скалярное произведение Петерсона получается при интегрировании (4.114) по модулярной фигуре M с $SL(2,\mathbb{R})$-инвариантной формой объёма $\frac{dxdy}{y^2}$:

$$< f,g >= \int_M (f,g)\frac{dxdy}{y^2}. \quad (4.116)$$

Заметим, что для сходимости интеграла требуется параболичность хотя бы одной из форм f или g.

5 Лекция 5

5.1 Метод Ранкина

Напомним, что произведением Петерсона двух модулярных форм веса k называется:

$$\langle f,g\rangle = \int\limits_{mf} f(\tau)\overline{g(\tau)}y^k\frac{dx\wedge dy}{y^2}, \quad (5.117)$$

где $x = \mathrm{Re}\tau$, $y = \mathrm{Im}\tau$, а интегрирование ведется по фундаментальной области $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$, например, по модулярной фигуре. Причем интеграл сходится, если хотя бы одна из этих форм параболична.

Целью данного раздела является изучение метода Ранкина. Мы продемонстрируем его на доказательстве следующего факта:

$$\langle f,e_k\rangle = \int\limits_{mf} f(\tau)\overline{e_k(\tau)}y^k\frac{dx\wedge dy}{y^2} = 0, \quad (5.118)$$

то-есть все функционалы на параболических формах даются самими параболическими формами. Вынесем в выражении для ряда Эйзенштейна общий множитель из каждого слагаемого, оставляя суммирование по взаимно простым парам c и d:

$$e_k(\tau) = \sum{}' \frac{1}{(m+n\tau)^k} = \sum_{\mu>0}\frac{1}{\mu^k}\sum_{(c,d)=1}\frac{1}{(c\tau+d)^k} = \frac{1}{2}\gamma_k\sum_{(c,d)=1}\frac{1}{(c\tau+d)^k}, \quad (5.119)$$

где использовано известное обозначение $\sum\limits_{\mu>0}\frac{1}{\mu^k} = \frac{1}{2}\gamma_k$. Далее следует воспользоваться тем фактом, что для любой пары c и d, таких, что $(c,d)=1$, найдутся целые числа a и b, для которых $ad-bc=1$. Тогда очевидно, что тоже равенство будет верно и для чисел $a+cj$ и $b+dj$. Другими словами, паре $(c,d)=1$ соответствует орбита матриц

$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \quad (5.120)$$

под действием слева группы матриц Γ_∞, оставляющих на месте точку $i\infty$:

$$\begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.121}$$

Тем самым суммирование по парам $(c, d) = 1$ эквивалентно суммированию по фактору $\Gamma_\infty \setminus \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Тогда имеем:

$$\langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2}\gamma_k \int\limits_{mf} f(\tau) \sum_{\Gamma_\infty \setminus \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})} \frac{1}{(\overline{c\tau + d})^k} y^k \frac{dx \wedge dy}{y^2} \tag{5.122}$$

Меняя порядок суммирования и интегрирования, получаем:

$$\frac{1}{2}\gamma_k \sum_{M_\alpha \in \Gamma_\infty \setminus \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})} \int\limits_{mf} f(\tau) \frac{1}{(\overline{c_\alpha \tau + d_\alpha})^k} y^k \frac{dx \wedge dy}{y^2} \tag{5.123}$$

где индекс α означает принадлежность к матрице

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} a_\alpha & b_\alpha \\ c_\alpha & d_\alpha \end{pmatrix}$$

Сделаем теперь замену переменной интегрирования в каждом слагаемом суммы: $\tau \to M_\alpha \tau$. При этом область интегрирования также изменится $mod.fig. \to M_\alpha(mod.fig.)$. Кроме того, имеем:

$$\begin{array}{c} \tau_\alpha = \frac{a_\alpha \tau + b_\alpha}{c_\alpha \tau + d_\alpha}, \quad f(\tau) = (c_\alpha \tau + d_\alpha)^{-k} f(\tau_\alpha), \\ \frac{dx \wedge dy}{y^2} = \frac{dx_\alpha \wedge dy_\alpha}{y_\alpha^2}, \quad y = |c_\alpha \tau + d_\alpha|^2 y_\alpha \end{array} \tag{5.124}$$

Итак

$$\langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2}\gamma_k \sum_{M_\alpha \in \Gamma_\infty \setminus \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})} \int\limits_{mf} f(\tau_\alpha) y_\alpha^k \frac{dx_\alpha \wedge dy_\alpha}{y_\alpha^2} = \frac{1}{2}\gamma_k \int\limits_{\bigcup M_\alpha(mf)} f(\tau_\alpha) y_\alpha^k \frac{dx_\alpha \wedge dy_\alpha}{y_\alpha^2} \tag{5.125}$$

Область интегрирования $\bigcup M_\alpha(mf)$ представляет из себя такое множество точек, что действие Γ_∞ переведет его в две верхних полуплоскости. Одним таким возможным представителем является полоса $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Интегрирование по переменной x дает ноль, так как форма $f(\tau)$ - параболическая.

5.2 Операторы Гекке

Рассмотрим решетку L. L' называется ее подрешеткой индекса n: $L' \overset{n}{\in} L$, если конечная группа L/L' состоит из n элементов. Отметим некоторые важные свойства такой градуировки подрешеток. Во-первых, оказывается, что в решетке размерности m число подрешеток индекса n равно:

$$\frac{n^m - 1}{n - 1} \tag{5.126}$$

При этом подразумевается, что n - простое.

Во-вторых, для любой подрешетки $L' \overset{n}{\in} L$, решетка $nL \overset{n^2}{\in} L$ является подрешеткой индекса n в L', то-есть:

$$nl \overset{n}{\in} L' \overset{n}{\in} L, \quad \forall L' \overset{n}{\in} L \tag{5.127}$$

Это, последнее свойство, несложно доказывается. Действительно, рассмотрим вектор $\gamma \in L$, тогда $n\gamma \in L'$. Далее рассмотрим класс $[\gamma] \in L/L'$. Поскольку эта группа состоит из n элементов, то складывая любой элемент с собой n раз, получим ноль, тогда $[n\gamma] = 0$ и, следовательно, $n\gamma \in L'$.

5.3 Гекке собственный базис

Важным свойством операторов Гекке является их диагонализуемость. Гекке собственный базис существует как в пространстве параболических форм, так и в пространстве обычных модулярных форм. В частности, оказывается, что ряды Эйзенштейна являются Гекке собственными. Проверкой этого факта мы сейчас и займемся.

$$T_k(p)e_k = p^{k-1} \sum_{L' \overset{p}{\in} L} \sum_{\gamma' \in L'} \frac{1}{\gamma'^k} \tag{5.128}$$

В последней сумме сумма берется по всем ненулевым γ'. Эту сумму разобъем на $\gamma' \in pL$ и $\gamma' \subsetneq L$. Далее воспользуемся следующим утверждением:

$$\begin{cases} \gamma' \in pL \Rightarrow \gamma' \in L' \; \forall L' \overset{p}{\in} L, \\ \gamma' \subsetneq pL \Rightarrow \exists \, ! \; L' : \; \gamma' \in L'. \end{cases} \tag{5.129}$$

Причем в последнем случае эта единственная подрешетка L' имеет индекс p порождается γ' и pL. Вспоминая, что подрешеток индекса p существует ровно $p+1$ и объединяя одну из них с единственной решеткой в случае $\gamma' \subsetneq pL$, получим:

$$\begin{aligned} T_k(p)e_k = p^{k-1} \left(\sum_{\gamma \in L} \frac{1}{\gamma^k} + p \sum_{\gamma \in pL} \frac{1}{\gamma^k} \right) = p^{k-1} \left(\sum_{\gamma \in L} \frac{1}{\gamma^k} + p^{1-k} \sum_{\gamma \in L} \frac{1}{\gamma^k} \right) = \\ = (p^{k-1} + 1)e_k \end{aligned} \tag{5.130}$$

5.4 Свойства операторов Гекке

Пусть $(m,n) = 1$, тогда

$$T_k(m)T_k(n) = T_k(mn) \tag{5.131}$$

Случай невзаимнопростых чисел генерируется следующим свойством:

$$T_k(p^r)T_k(p) = T_k(p^{k+1}) + p^{k-1}T(p^{k-1}), \tag{5.132}$$

где p - простое.

Теперь обоснуем корректность действия операторов Гекке на пространстве модулярных форм. Для этого нужно доказать, что при действии на модулярную форму, получается ряд Тейлора. Оказывается, что результат действия на модулярную форму

$$f(\tau) = \sum_{n\geq 0} a_n q^n$$

действительно имеет хорошее q разложение:

$$T_k(p)f(\tau) = \sum_{m\geq 0} a_{mp}q^m + p^{k-1}\sum_{n\geq 0} a_n q^{np} \tag{5.133}$$

Для доказательства рассмотрим подрешетки индекса p в стандартной решетке порожденной $< \tau, 1 >$: $L' \overset{p}{\in} < \tau, 1 >$. Такие решетки порождены $< a\tau + b, c\tau + d >$: $ad - bc = p$. Поэтому, множество таких решеток можно задать матрицами с определителем M^p, которые еще следует профакторизовать по всевозможным заменам базиса, т.е. по $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Матрицы, лежащие в факторе $\{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\backslash \mathrm{M^p}\}$ представимы в виде:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \ a, d > 0, \ ad = p, \ 0 \leq < d \tag{5.134}$$

Для простых p число таких матриц равно $p + 1$ - индексу подрешетки:

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & p \end{pmatrix}, \ 0 \leq j < p \tag{5.135}$$

Воспользуемся этим, для того, чтобы явно записать действие оператора Гекке на форму $f(\tau)$:

$$\begin{gathered} T_k(p)f(\tau) = p^{k-1}\left(f(< p\tau, 1 >) + \sum_j f(< \tau + j, p >) \right) = \\ = p^{k-1}\left(p^{-k}\sum_j f\left(< \tfrac{\tau+j}{p}, 1 \right) > + f(p\tau, 1) \right) = \\ p^{k-1}\left(p^{-k}\sum_j\sum_n a_n q^{\frac{n}{p}}\mathbf{e}\left(\tfrac{nj}{p}\right)\Big) + \sum_n a_n q^{np} \right) \end{gathered} \tag{5.136}$$

Заметим теперь, что

$$\sum_j \mathbf{e}\left(\frac{jn}{p}\right) = \begin{cases} p, \ (n,p) = p \\ 0, \ (n,p) < p \end{cases} \tag{5.137}$$

Для доказательства достаточно использовать теорему Виетта для уравнения $x^p - 1 = 0$, корнями которого являются корни из единицы. Тогда, положив $n = pm$, получим (5.133).

Из (5.133) следует, что для Гекке собственной формы:

$$T_k(p)f(\tau) = \lambda_p f(\tau) \tag{5.138}$$

собственное значение просто выражается через коэффициенты q разложения

$$\lambda_p = \frac{a_p}{a_1}, \tag{5.139}$$

а в случае нормированных форм, т.е. $a_1 = 1$ буквально с этими коэффициентами совпадает (доказательство для составных p мы здесь опускаем). Отсюда, в свою очередь следует однократность спектра оператора Гекке на параболических формах. Кроме того заметим, что для непараболических форм собственные значения равны $p^{k-1}+1$, что совпадает с собственными значениями рядов Эйзенштейна. Это является отражением того факта, что ряды Эйзенштейна являются единственным (с точностью до растяжений) Гекке собственным базисом непарболических модулярных форм.

6 Лекция 6

6.1 Эрмитовость оператора Гекке

Докажем, что оператор Гекке эрмитов:

$$< T_k(n)f, g >=< f, T_k(n)g >, \tag{6.140}$$

где f и g- параболические формы веса k. По определению:

$$< T_k(n)f, g >= \int_{\{L\}} T_k(n)f(\tau)\overline{g(\tau)}y^k \frac{dxdy}{y^2} = n^{k-1}\int_{\{L\}} \sum_{L'\subset_n L} f(L')\overline{g(L)}(\mathrm{covol}L)^k\frac{dxdy}{y^2}. \tag{6.141}$$

Здесь замечено, что $y = \mathrm{Im}\tau =$covol L. Суммирование ведется по подрешеткам L' в L индекса n. Преобразуем последний интеграл, поменяв местами порядок интегрирования и суммирования:

$$n^{k-1}\sum_{L'\subset_n L}\int_{\{L\}} f(L')\overline{g(L)}(\mathrm{covol}L)^k\frac{dxdy}{y^2} = n^{k-1}\int_{\{L'\subset_n L\}} f(L')\overline{g(L)}(\mathrm{covol}L)^k\frac{dxdy}{y^2} \tag{6.142}$$

Каждой паре $\{L, L'\}$, $L' \subset_n L$ однозначно соответствует пара $\{L', L''\}$, $L'' \subset_n L'$(???), при этом:

$$\mathrm{covol}L' = n\mathrm{covol}L, g(L) = n^k g(nL). \tag{6.143}$$

Поэтому вместо суммирования по $\{L, L'\}$ можно перейти к суммированию по $\{L', L''\}$. При переходе от интегрирования по x, y к интегрированию по x', y' форма объёма инвариантна:

$$\begin{aligned} &n^{k-1}\textstyle\int_{\{L''\subset_n L'\}} f(L')\overline{g(L'')}n^k(\mathrm{covol}L)^k\frac{dx'dy'}{y'^2}\\ &= n^{k-1}\textstyle\int_{\{L'\}} f(L')\overline{\sum_{L''\subset_n L'} g(L'')}(\mathrm{covol}L')^k\frac{dx'dy'}{y'^2}\\ &= \textstyle\int_{\{L'\}} f(\tau)\overline{T_k(n)g(\tau)}(y)^k\frac{dxdy}{y^2} =< f, T_k(n)g > . \end{aligned} \tag{6.144}$$

6.2 Оценки для коэффициентов параболической формы

1. Для параболической формы $f(\tau) = \sum_{n>0} a_n q^n$: $a_n \ll n^{k/2}$.
2. Для ряда Эйзенштейна e_k: $a_n \ll n^{k-1}$

6.3 Ядро оператора Гекке

Оператор Гекке переводит параболические формы в параболические. В параболических формах данного веса есть Гекке- собственный базис. Это позволяет определить ядра соответствующих операторов Гекке:

$$T_k(n) : \mathcal{S}^k \to \mathcal{S}^k, f(\tau) \to \int f(\tau')h_n(\tau,\tau')(\mathrm{Im}\tau')^k \frac{d\tau' d\overline{\tau'}}{2i}. \tag{6.145}$$

Пусть $f_i(\tau)$- базис нормализованных (т.е. $a_1 = 1$) Гекке- собственных параболических форм веса k [†] . Известно, что собственные значения n- го оператора Гекке равны соответствующим коэффициентам q- разложения формы (см. лекцию 5):

$$T_k(n)f_i = a_{in}f_i. \tag{6.146}$$

Эти данные позволяют найти ядра операторов:

$$h_n(\tau,\tau') = \sum_i \frac{f_i(\tau)f_i(\tau')}{< f_i, f_i >}a_n. \tag{6.147}$$

Например, существует только одна параболическая форма веса 12- $\Delta(\tau)$. Она является Гекке- собственной, поэтому:

$$h_n^{12} = \frac{\Delta(\tau)\Delta(\tau')}{const}\tau_n, \tag{6.148}$$

где τ_n- коэффициенты ряда:

$$\sum \tau_n q^n = q\prod(1-q^n)^{24}. \tag{6.149}$$

В этом параграфе мы докажем общую формулу для ядра:

$$h_n(\tau,\tau') = \sum_{ad-bc=n} \frac{1}{(c\tau\tau' + a\tau + d\tau' + b)^k}, \tag{6.150}$$

где суммирование ведется по целым a, b, c, d. Можно показать, что при $n \geq 0$ ряд сходится к голоморфной функции(???), а при $n < 0$- к аналитической(???). Из интегрального представления (6.145) видно, что функция $h_n(\tau,\tau')$ должна быть модулярно инвариантной по обеим переменным. Записанная в виде ряда функция $h_n(\tau,\tau')$ симметрична, поэтому достаточно доказать модулярную инвариантность по одной переменной. Для этого перепишем ряд следующим образом:

$$h_n(\tau,\tau') = \sum_{ad-bc=n} \frac{1}{(\tau' + \frac{a\tau+b}{c\tau+d})^k(c\tau+d)^k} \tag{6.151}$$

Теперь $SL(2,\mathbb{Z})$- инвариантность по переменной τ очевидна.

[†]Для справки: при $k = 4, 6, 8, 10, 14$ параболических форм нет; при $k = 12, 16, 18, 20, 22, 26$ есть одна параболическая форма; при $k = 24$- две.

При $n=0$ можно выразить ряд (6.150) через ряды Эйзенштейна по τ и τ'. Для этого нам понадобится следующий факт из теории чисел. Уравнение $ad=bc$ имеет следующие решения в целых числах:

$$c=j\gamma\gamma',\ \ d=j\gamma'\delta,\ \ b=j\delta\delta',\ \ a=j\gamma\delta', \tag{6.152}$$

где $(\gamma,\delta)=1$ и $(\gamma',\delta')=1$. Это представление двукратно ,т.к. можно одновременно поменять знаки у $\gamma,\gamma',\delta,\delta'$, поэтому:

$$\begin{array}{c} h_0(\tau,\tau')=\sum_{ad-bc=0}\frac{1}{(c\tau\tau'+a\tau+d\tau'+b)^k}=\frac{1}{2}\sum_j\frac{1}{j^k}\sum\frac{1}{(\gamma\tau+\delta)^k}\sum\frac{1}{(\gamma'\tau+\delta')^k}= \\ =\frac{e_k(\tau)e_k(\tau')}{\gamma_k}. \end{array} \tag{6.153}$$

Докажем параболичность $h_n(\tau,\tau')$ (например по τ'). Пусть даны c и d и $\lambda=$ НОД(c,d), тогда λ делит n. Пусть целые a_0 и b_0 удовлетворяют уравнению $a_0d-b_0c=n$. Тогда (факт из теории чисел) любые другие решения этого уравнения при фиксированных c и d имеют вид: $a'=a_0+j\frac{c}{\lambda}$, $b'=b_0+j\frac{d}{\lambda}$, $j\in\mathbb{Z}$. Поэтому можно переписать h_n в виде:

$$\begin{array}{c} h_n(\tau,\tau')=\sum_{ad-bc=n}\frac{1}{(\tau'+\frac{a\tau+b}{c\tau+d})^k(c\tau+d)^k}= \\ =\sum_{c,d,j}\frac{1}{(\tau'+\frac{a_0\tau+b_0}{c\tau+d}+\frac{j}{\lambda})^k(c\tau+d)^k}= \\ =\sum_{c,d}\frac{1}{(c\tau+d)^k}\lambda^k\epsilon_k\left(\left(\tau'+\frac{a_0\tau+b_0}{c\tau+d}\right)\lambda\right). \end{array} \tag{6.154}$$

Здесь ϵ_k- тригонометрические функции Эйзенштейна (см. лекцию 1). При $\tau'\to i\infty$, $\epsilon_k\to 0$, что и доказывает параболичность, а следовательно и бипараболичность h_n.

Важное свойство рядов h_n:

$$T_k(n)h_1=n^{k-1}h_n. \tag{6.155}$$

Если $f(\tau)$- параболическая форма веса k, то $h_1(\tau,-\overline{\tau'})$- ядро оператора $T_k(1)$:

$$\begin{array}{c} \int_M f(\tau)\sum_{ad-bc=1}\overline{\frac{1}{(\overline{\tau'}-\frac{a\tau+b}{c\tau+d})^k(c\tau+d)^k}}y^k\frac{dxdy}{y^2}= \\ =\sum_{ad-bc=1}\int_{\alpha(M)}f(\tau)(\tau'-\overline{\tau})^{-k}y^k\frac{dxdy}{y^2} \\ =2\int_{\mathrm{Im}\tau>0}f(\tau)(\tau'-\overline{\tau})^{-k}y^k\frac{dxdy}{y^2}=c_kf(\tau') \end{array} \tag{6.156}$$

Мы воспользовались тем, что $(\tau'-\overline{\tau})^{-k}y^k$- функция Грина на верхней полуплоскости. Теперь, используя эрмитовость операторов Гекке и свойство (6.155), можно доказать, что ряд h_n действительно является ядром $T_k(n)$:

$$T_k(n)g=<T_k(n)g,h_1>=<g,T_k(n)h_1>=n^{k-1}<g,h_n>. \tag{6.157}$$

Отметим нетривиальные следствия того, что нет параболических форм веса $k=4,6,8,10,14$: соответствующие $h_k=0$.

7 Лекция 7: Главные конгруэнц-подгруппы. Модулярные формы на подгруппах в $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})2Z$.

Напомним два пункта в определение модулярной формы веса k:

$$1.\ f(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = (c\tau+d)^k f(\tau), \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})2Z \tag{7.158}$$

$$2.\ f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n, \quad q = \mathbf{e}(\tau) \tag{7.159}$$

Целью настоящей лекции является изучение модулярных форм, относительно некоторой подгруппы $\Gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})2Z$. Первый пункт в определении (7.158) остается неизменным, тогда как второй, означающий хорошее поведение $f(\tau)$, при $\tau \to \infty$, требует разъяснений. (Вообще следует отметить, что необходимость условия (7.159) связана с желанием рассматривать конечномерное пространство модулярных форм.) Условие (7.159) для группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})2Z$ означает хорошее поведение $f(\tau)$ не только на бесконечности, но в и любой рациональной точке, т.е. на множестве $\mathrm{Q} \cup \infty$, так как $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})2Z$ действует на этом множестве транзитивно. Для произвольной подгруппы $\Gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})2Z$ это не так, поэтому аналог условия (7.159) должен быть наложен на все орбиты $\Gamma\backslash\{\mathrm{Q} \cup \infty\}$, каждая из которых состоит из таких рациональных точек, которые связаны действием подгруппы Γ.

Важным примером подгруппы из $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})2Z$ является, так называемая, главная когруэнц-подгруппа уровня N. Матрицы, составляющие эту подгруппу, сравнимы с единичной по модулю N:

$$\Gamma(N) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} mod\mathrm{N} \tag{7.160}$$

Дадим еще два стандартных определения:

$$\Gamma_0(N) = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} mod\mathrm{N} \tag{7.161}$$

$$\Gamma_1(N) = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} mod\mathrm{N} \tag{7.162}$$

Мы будем изучать узкий класс подгрупп в $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})2Z$, которые содержат $\Gamma(N)$ для какого-то N, т.е.

$$\Gamma:\ \exists N,\ \Gamma(N) \in \Gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})2Z \tag{7.163}$$

(Эти подгруппы называются конгруэнц-подгруппами уровня N.) Такое ограничение позволит разлагать $f(\tau)$ в ряд. Действительно, q-разложения для модулярных форм относительно $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})2Z$ возникало как следствие того, что в $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})2Z$ существовала подгруппа Γ_∞ (стабилизатор ∞)

$$\Gamma_\infty = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ i \in \mathrm{Z} \tag{7.164}$$

которая означала, что любая форма периодична с периодом 1, откуда и следовало разложение в ряд по степеням $\mathbf{e}(\tau)$. Теперь жt матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.165)$$

вовсе не обязана пренадлежать Γ. В то же время условие (7.163) гарантирует, что

$$\exists \nu : \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma \quad (7.166)$$

Выберем наименьшее из таких ν. Тогда $f(\tau) = f(\tau + \nu)$ и, следовательно,

$$f(\tau) = \sum_{n \geq 0} a_n q^{\frac{n}{\nu}} \quad (7.167)$$

Тот факт, что сумма в (7.167) берется только по положительным степеням, ниоткуда не следует, а является дополнительным условием, аналогичным (7.159). Параболические формы определяются также аналогично, т.е. для них $a_0 = 0$.

Теперь вернемся к обсуждению того, что подгруппа Γ действует на множестве $\mathrm{Q} \cup \infty$, вообще говоря, нетранзитивно. Значит, условия (7.167) недостаточно для хорошего поведения $f(\tau)$, т.е аналог этого условия следовало бы наложить во всех рациональных точках. Это счетное число условий можно записать в другом виде. А именно, можно свести изучение поведения модулярной формы относительно подгруппы Γ в окрестности всех рациональных точек λ, к изучению поведения этой модулярной формы относительно групп $\Gamma^{(\lambda)}$ в окрестности ∞, где подгруппы $\Gamma^{(\lambda)}$ получаются из Γ сопряжением элементом из $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})2Z$, переводящим $\lambda \to \infty$.

??????

Докажем, что множество $\Gamma\backslash\{\mathrm{Q}\cup\infty\}$ конечно. Для этого достаточно заметить, что $\{\mathrm{Q}\cup\infty\} = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})2\mathrm{Z}/\Gamma_\infty$, тогда $\Gamma\backslash\{\mathrm{Q}\cup\infty\} = \Gamma\backslash\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})2\mathrm{Z}/\Gamma_\infty$, но уже левый фактор конечен. Это множество называет множеством вершин, множеством параболических точек или каспами (cusp).

8 Лекция 9: Модулярные формы Якоби

Запишем модулярную форму Зигеля, т.е. форму инвариантную относительно преобразований

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : \ \Omega \to (\Omega B + D)^{-1}(\Omega A + C), \text{ где } \Omega = \begin{pmatrix} \tau & \xi \\ \xi & \tau' \end{pmatrix} \quad (8.168)$$

в виде ряда по $w = \mathbf{e}(\tau')$:

$$F(\Omega) = \sum_m f_m(\xi, \tau) w^m \quad (8.169)$$

Модулярность означает, что

$$F(M\Omega) = \det{}^k(\Omega B + D) F(\Omega) \quad (8.170)$$

Пусть теперь матрица M выглядит следующим образом:

$$M: \; A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \mu & \rho \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} \tag{8.171}$$

Тогда (8.170) означает:

$$\begin{gathered} (\tau, \xi, \tau') = (\tau, \xi + \lambda\tau + \mu, \tau' + 2\lambda\xi + \lambda^2\tau + \rho), \\ f_m(\xi + \lambda\tau + \mu, \tau) = \mathbf{e}(-m(\lambda^2\tau + 2\lambda\xi)) f_m(\xi, \tau), \end{gathered} \tag{8.172}$$

т.е. f_m преобразуется как $2m$ степень тэта-функции. А относительно модулярных преобразований, действующих на τ:

$$f_m(\frac{a\xi}{c\tau + d}) = (c\tau + d)^k \mathbf{e}\left(\frac{mc\xi^2}{c\tau + d}\right) f_m(\xi, \tau) \tag{8.173}$$

Такое преобразование генерируется матрицей

$$M: \; A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; ad - bc = 1 \tag{8.174}$$

Слабой формой Якоби веса k и индекса m будем называть функцию $f(\xi, \tau)$, удовлетворяющую свойствам (8.172) и (8.173).

Слабая форма Якоби называется формой Якоби, если ее разложение

$$f(\xi, \tau) = \sum c(n, l) \mathbf{e}(\xi n) \mathbf{e}(\tau l) \tag{8.175}$$

идет по $n^2 \leq 4lm$, причем в случае $n^2 < 4lm$ она называется параболической.

Для Тейлоровского разложения (8.175) отметим свойство: если две пары чисел n, l и n', l' таковы, что

$$\begin{gathered} l = l' \mathrm{mod} 2m, \\ 4mn - l^2 = 4mn' - l'^2, \end{gathered} \tag{8.176}$$

то

$$c(n, l) = c(n', l') \tag{8.177}$$

Вернемся снова к матрицам (8.171) и (8.174). Эти матрицы являются стабилизаторами $\tau' = \infty$ и образуют соответствующую подгруппу. Кроме того матрицы (8.171), которые будем обозначать $T(\lambda, \mu, \rho)$, образуют группу $\mathbb{Z}^2 \ltimes \mathbb{Z}$. Переменная ρ параметризует центральное расширение, геометрический смысл которого состоит в том, что оно определяет "направление" к точке $\tau' = \infty$. Запишем групповой закон умножения для матриц $T(\lambda, \mu, \rho)$:

$$T(\lambda, \mu, \rho) T(\lambda', \mu', \rho') = T(\lambda + \lambda', \mu + \mu', \rho + \rho' + \mu\lambda' - \mu'\lambda) \tag{8.178}$$

Эта группа называется группой Гейзенберга-Вейля H. Ее появление связано с тем, что на $\mathbb{Z}^2$ есть симплектическая форма, которая производит алгебру Гейзенберга, а группа Гейзенберга-Вейля есть поднятие этой алгебры до группы. Вспомним теперь, что (8.174) порождала обычное действие $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) 2Z$ на τ (8.173). Это действие сохраняет вышеупомянутую симплектическую структуру (или форму объема $\mu\lambda' - \mu'\lambda$)

на $\mathbb{Z}^2$ и, следовательно, может действовать на группу Гейзенберга H, т.е. полная группа:

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})2Z \ltimes H \tag{8.179}$$

Теперь перечислим различные способы построения обычных модулярных форм из модулярной формы Якоби.

Во-первых, как очевидно следует из (8.173), модулярная форма получится при $\xi = 0$ или $m = 0$.

Во-вторых, если $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$ - рациональные числа, то

$$\mathbf{e}(m\lambda^2) f_m(\lambda\tau + \mu, \tau) \tag{8.180}$$

есть модулярная форма относительно решетки индекса N^2, в том случае когда

$$N\lambda, N\mu \in \mathbb{Z} \tag{8.181}$$

Отсюда следует, что модулярные формы Якоби конечномерны. Мы увидим это другим способом.

Заметим, что из (8.173) следует не только то, что $f(0,\tau)$ является модулярной формой веса k, но и то, что $f'(0,\tau)$ является модулярной формой веса $k+1$. Однако $f''(0,\tau)$ уже очевидно не будет модулярной формой веса $k+2$. Тем не менее, паразитный член можно исключить рассмотрев выражение $kf''(0,\tau) - m\dot{f}(0,\tau)$. Общее утверждение состоит в том, что аналогичным образом можно заработать модулярную форму веса $k+i,\ i \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{gathered} f(0,\tau) \\ f'(0,\tau) \\ kf''(0,\tau) - m\dot{f}(0,\tau) \\ \dots \end{gathered} \tag{8.182}$$

Более того, все такие модулярные формы, кроме первой, являются параболическими.

Итак, для модулярных форм Якоби $J_{k,m}$ мы описали вложение:

$$J_{k,m} \hookrightarrow M_k \oplus S_{k+1} \oplus S_{k+2} \oplus \dots \tag{8.183}$$

На самом деле сумма в правой части ограничена числом $k+2m+1$, так как, если форма Якоби лежит в ядре уже этого отображения, то она равна нулю (в противном случае у нее будет ноль кратности больше $2m$). Значит,

$$J_{k,m} \hookrightarrow M_k \oplus S_{k+1} \oplus \dots \oplus S_{k+2m} \tag{8.184}$$

Отсюда имеем:

$$\dim J_{k,m} \leq \left\{ \begin{array}{l} \dim M_k + \dim S_{k+2} + \dots + \dim S_{k+2m},\ \text{если } k - \text{четное} \\ \dim S_{k+1} + \dots + \dim S_{k+2m-1},\ \text{если } k - \text{нечетное} \end{array} \right. \tag{8.185}$$

Тем самым доказана конечномерность модулярных форм Якоби. Кроме того мы продемонстрировали, что параболическая форма неоднозначно поднимается до формы

Якоби. Это утверждение верно для любой параболической формы. Более того для $J_{k,1}$ указанное вложение оказывается изоморфизмом:

$$J_{k,1} \cong M_k \oplus S_{k+2}, \text{ если } k - \text{четное} \tag{8.186}$$

Для того, чтобы доказать это утверждение, следует построить достаточно много форм Якоби. По анологии построим ряды Эйзенштейна:

$$E_{k,m}(\xi,\tau) = \frac{1}{2}\sum_{(c,d)=1}\sum_{\lambda\in\mathbb{Z}}(c\tau+d)^{-k}\mathbf{e}(m\left(\lambda^2\frac{a\tau+b}{c\tau+d}+\tau\lambda-\frac{c\xi^2}{c\tau+d}\right)) \tag{8.187}$$

Утверждается, что такие ряды являются модулярными формами Якоби веса m и индекса k. Вычисление коэффициентов разложения является сложной задачей. Цагиром она была сделана для $E_{k,1}$. Оказывается, что аналогично обычным рядам Эйзенштейна, модулярные формы $J_{k,1}$ порождаются $E_{4,1}$ и $E_{6,1}$. Однако неверно, что все модулярные формы Якоби порождаются хотя бы некоторым конечным набором ,другими словами, полное кольцо форм Якоби неконечно порождено.